Probabilités sur un ensemble fini

Dany-Jack Mercier

IUFM de Guadeloupe, Morne Ferret,
BP399, Pointe-à-Pitre cedex 97159, France
dany-jack.mercier@univ-ag.fr

13 mars 2003

Introduction

Ces pages correspondent aux leçons n°3 à 6 de l'oral 1 du capes externe 2001 dont les intitulés suivent :

n^{0}3 : Description mathématique d'une expérience aléatoire : ensemble des événements élémentaires, événements, probabilité (on se limitera au cas où l'ensemble des événements élémentaires est fini).

n^{0}4 : Probabilité conditionnelle, indépendance de deux événements (on se limitera au cas où l'ensemble d'épreuves est fini). Applications à des calculs de probabilités.

n^{0}5 : Variable aléatoire à valeurs réelles dont l'ensemble des valeurs est fini. Loi de probabilité. Espérance mathématique, variance. Exemples.

n^{0}6 : Schéma de Bernoulli et loi binomiale. Exemples.

De façon générale, si n et m sont des entiers relatifs non nuls tels que $n \leq m$, je noterai $[n..m]$ l'ensemble $\{n, n+1, ..., m\}$, et aussi $\mathbb{N}_n$ l'ensemble $\{1, ..., n\}$. Le cardinal d'un ensemble fini F sera noté indifféremment $\#F$ ou $|F|$. Le symbole $\binom{n}{p}$ représente le coefficient binomial $\frac{n!}{p!(n-p)!}$.

1 Expérience aléatoire

Une expérience est **aléatoire** si l'on ne connaît pas son issue à priori (par exemple jeter un dé, jouer au loto...). L'ensemble Ω des issues possibles constitue l'**univers** de l'expérience. Chaque issue, i.e. chaque élément de Ω, est appelé **événement élémentaire**. Un **événement** est une partie de Ω.

Exemple : 1. On lance une pièce de monnaie trois fois de suite et l'on note les apparitions des côtés "pile" ou "face". L'univers peut être

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, FFP, FPF, PFF, FFF\}$$

[0] [cpro0001] v1.10 http://perso.wanadoo.fr/megamaths

si l'on désire retenir l'ordre d'apparition des côtés pile ou face. Il sera

$$\Omega' = \{0, 1, 2, 3\}$$

si l'on s'intéresse seulement au nombre de fois où le résultat "pile" a été obtenu. Ici, on note 1 si pile a été obtenu 1 fois, ... Sur cet exemple on remarque que la même expérience aléatoire peut donner naissance à des univers différents selon les résultats auxquels on s'intéresse.

2 Probabilité

2.1 Définition

On se limite au cas où l'univers Ω des issues est fini.

Définition 1 *Une **probabilité** sur Ω est une application*

$$\mathrm{p} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}_+$$

qui vérifie :
$(P1)$ $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathrm{p}(A \cup B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B)$,
$(P2)$ $\mathrm{p}(\Omega) = 1$.
*L'axiome $(P1)$ est appelé **axiome des probabilités totales**. Un **espace probabilisé** est la donnée d'un couple (Ω, p) où Ω est un ensemble et p une probabilité sur Ω.*

Théorème 1 *Si p est une probabilité sur Ω,*
(1) $\operatorname{Im} \mathrm{p} \subset [0, 1]$ *et* $\mathrm{p}(\emptyset) = 0$,
(2) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathrm{p}(\complement A) = 1 - \mathrm{p}(A)$,
(3) $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathrm{p}(A \cup B) = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \cap B)$.

Preuve : $\mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(\complement A) = 1$ entraîne $\mathrm{p}(A) \leq 1$, et $\mathrm{p}(\emptyset) = 1 - \mathrm{p}(\Omega) = 0$, d'où (1) et (2). Les réunions disjointes

$$\begin{aligned} A &= (A \cap B) \,\dot{\cup}\, A \backslash B \\ B &= (A \cap B) \,\dot{\cup}\, B \backslash A \\ A \cup B &= (A \cap B) \,\dot{\cup}\, A \backslash B \,\dot{\cup}\, B \backslash A \end{aligned}$$

permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(A \cup B) &= \mathrm{p}(A \cap B) + \mathrm{p}(A \backslash B) + \mathrm{p}(B \backslash A) \\ &= \mathrm{p}(A \cap B) + (\mathrm{p}(A) - \mathrm{p}(A \cap B)) + (\mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \cap B)) \\ &= \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A \cap B) \end{aligned}$$

ce qui prouve (3). ■

Le Théorème suivant signifie que se donner une probabilité sur un ensemble fini Ω de cardinal n revient exactement à se donner n nombres réels positifs p_i, $1 \leq i \leq n$, tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Sa vérification est laissée au lecteur :

Théorème 2 ***Caractérisation d'une probabilité sur un ensemble fini***
Une application $\mathrm{p} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}_+$ est une probabilité si et seulement si
(1) $\sum_{a \in \Omega} \mathrm{p}(a) = 1$,
(2) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathrm{p}(A) = \sum_{a \in A} \mathrm{p}(a)$.

2.2 Equiprobabilité

Dans la pratique, il y a deux façons de définir une probabilité :

$\star$ On peut faire une étude statistique sur un très grand nombre d'épreuves, puis calculer la fréquence d'apparition de chaque événement. Cette fréquence sera une valeur approchée de la probabilité de cet événement.

$\star$ On utilise les symétries physiques de l'expérience : boules identiques, dés non pipés et de forme cubique... Dans ce cas, on constate souvent que tous les événements élémentaires ont la même probabilité p. On dit qu'ils sont **équiprobables**, et l'on peut écrire

$$\mathrm{p}(\Omega) = \sum_{a \in \Omega} \mathrm{p}(a) = (\#\Omega) \times p = 1$$

d'où $\mathrm{p}(a) = \frac{1}{\#\Omega}$ pour tout $a \in \Omega$. On déduit

$$\forall A \subset \Omega \quad \mathrm{p}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues au total}}.$$

Exemple : Dans la situation décrite en **1**, les issues de $\Omega = \{PPP, ..., FFF\}$ sont équiprobables, donc $\mathrm{p}(a) = \frac{1}{8}$ pour tout $a \in \Omega$. Par contre les événements élémentaires de Ω' ne sont pas équiprobables. Comme $\Omega' \subset \mathcal{P}(\Omega)$, on peut tout de même calculer la distibution de probabilité de Ω' :

a	0	1	2	3
$\mathrm{p}(a)$	1/8	3/8	3/8	1/8

2.3 Formule de Poincarré

C'est une généralisation de la formule donnant $\mathrm{p}(A \cup B)$:

Théorème 3 ***Formule de Poincarré***
Pour tous $A_1, A_2, ..., A_m \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(A_1 \cup ... \cup A_m) = & \sum_{1 \le i \le m} \mathrm{p}(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le m} \mathrm{p}(A_i \cap A_j) + ... \\ & + (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le m} \mathrm{p}(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}) + ... + (-1)^{m+1} \mathrm{p}(A_1 \cap ... \cap A_m). \end{aligned}$$

Preuve : Récurrence sur m. ■

Exemple : 2. On considère n tiroirs numérotées de 1 à n, et n boules numérotées de 1 à n. On dépose une boule dans chaque tiroir. Quelle est la probabilité pour qu'aucun des tiroirs ne contienne une boule ayant le même numéro ?

On calcule la probabilité de l'événement contraire A : "au moins l'un des tiroirs contient une boule ayant le même numéro", la probabilité cherchée étant alors $1 - \mathrm{p}(A)$. Si A_i désigne l'événement "la i-ième boule est dans le i-ième tiroir", on a $A = A_1 \cup ... \cup A_n$ et d'après la formule de Poincarré

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(A) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n} \mathrm{p}(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}. \end{aligned}$$

3 Probabilités conditionnelles

3.1 Définitions

Le tableau ci-dessous comptabilise les fumeurs dans une entreprise de 500 employés :

	Hommes H	Femmes $\overline{H}$
Fumeurs F	210	80
Non Fumeurs $\overline{F}$	70	140

La probabilité pour qu'une personne soit un fumeur sachant que c'est un homme est

$$\frac{\#(H \cap F)}{\#H} = \frac{210}{280} = 0,75,$$

et la probabilité pour qu'une personne soit un fumeur sachant que c'est une femme est

$$\frac{\#\left(\overline{H} \cap F\right)}{\#\overline{H}} = \frac{80}{220} \simeq 0,36.$$

Soient Ω un univers fini muni d'une probabilité p, et soient A et B deux événements tels que $\mathrm{p}(B) \neq 0$. On suppose tous les événements élémentaires de Ω équiprobables. La probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé est notée $\mathrm{p}(A/B)$ et vaut :

$$\mathrm{p}(A/B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{\mathrm{p}(A \cap B)}{\mathrm{p}(B)}.$$

Théorème 4 ***Probabilité conditionnelle***
Soit B un événement de probabilité non nulle. L'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{p}(./B): & \mathcal{P}(\Omega) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & A & \mapsto & \frac{\mathrm{p}(A \cap B)}{\mathrm{p}(B)} \end{array}$$

est une probabilité sur Ω.

Définition 2 *Le nombre*

$$\mathrm{p}(A/B) = \frac{\mathrm{p}(A \cap B)}{\mathrm{p}(B)}$$

est appelé ***probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.***

Preuve : si $A \cap A' = \emptyset$,

$$\mathrm{p}\left(A \cup A'/B\right) = \frac{\mathrm{p}((A \cup A') \cap B)}{\mathrm{p}(B)} = \frac{\mathrm{p}(A \cap B) + \mathrm{p}(A' \cap B)}{\mathrm{p}(B)} = \mathrm{p}(A/B) + \mathrm{p}\left(A'/B\right)$$

et

$$\mathrm{p}(\Omega/B) = \frac{\mathrm{p}(\Omega \cap B)}{\mathrm{p}(B)} = 1. \blacksquare$$

Définition 3 *Deux événements A et B sont dits* ***indépendants en probabilité*** *si l'on a* $\mathrm{p}(A/B) = \mathrm{p}(A)$*. Cela équivaut à* $\mathrm{p}(B/A) = \mathrm{p}(B)$*, ou encore à* $\mathrm{p}(A \cap B) = \mathrm{p}(A)\,\mathrm{p}(B)$*.*

Définition 4 *Deux événements A et B tels que* $\mathrm{p}(A \cap B) = 0$ *sont dits* ***incompatibles en probabilité****.*

Théorème 5 *Si les événements A et B sont indépendants, il en est de même des événements $\complement A$ et B, A et $\complement B$, et aussi $\complement A$ et $\complement B$.*

Preuve : Si A et B sont indépendants,

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(B) = \mathrm{p}\left(\complement A \cap B\right) + \mathrm{p}(A \cap B) \quad &\Rightarrow \mathrm{p}\left(\complement A \cap B\right) = \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(A)\,\mathrm{p}(B) \\ &\Rightarrow \mathrm{p}\left(\complement A \cap B\right) = \mathrm{p}\left(\complement A\right).\mathrm{p}(B) \end{aligned}$$

et les deux premières affirmations sont démontrées. La troisième est une conséquence directe des deux premières :

$$A \text{ et } B \text{ indépendants } \Rightarrow \complement A \text{ et } B \text{ indépendants } \Rightarrow \complement A \text{ et } \complement B \text{ indépendants.}$$

On peut aussi préférer le calcul direct :

$$\begin{aligned} \mathrm{p}\left(\complement A \cap \complement B\right) &= \mathrm{p}\left(\complement (A \cup B)\right) = 1 - \mathrm{p}(A \cup B) \\ &= 1 - \mathrm{p}(A) - \mathrm{p}(B) + \mathrm{p}(A \cap B) \\ &= 1 - \mathrm{p}(A) - \mathrm{p}(B) + \mathrm{p}(A)\,\mathrm{p}(B) \\ &= \mathrm{p}\left(\complement A\right).\mathrm{p}\left(\complement B\right). \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque : Un complément sur l'indépendance en probabilité est donné à la Section 6.

Exercices : 3. Efficacité d'un vaccin : Une épidémie de grippe est déclarée. On sait que 6 personnes sur 10 ont été vaccinées. Une étude statistique montre que la probabilité d'être malade est $0,4$ et que celle d'être vacciné sachant que l'on est malade est $0,25$. Quelles sont les chances d'attraper la grippe en étant vacciné ? Et celles d'attraper la grippe sans avoir été vacciné ? Le vaccin est-il efficace ?

Solution : Soient V la population vaccinée et M la population malade. On a

$$\mathrm{p}(M) = 0,4; \quad \mathrm{p}(V) = 0,6; \quad \mathrm{p}(V/M) = 0,25,$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(M/V) &= \frac{\mathrm{p}(M \cap V)}{\mathrm{p}(V)} = \frac{\mathrm{p}(V/M).\mathrm{p}(M)}{\mathrm{p}(V)} = \frac{0,25 \times 0,4}{0,6} = \frac{1}{6} \simeq 0,16 \\ \mathrm{p}\left(M/\overline{V}\right) &= \frac{\mathrm{p}\left(M \cap \overline{V}\right)}{\mathrm{p}\left(\overline{V}\right)} = \frac{\mathrm{p}\left(\overline{V}/M\right).\mathrm{p}(M)}{1 - \mathrm{p}(V)} = \frac{(1 - \mathrm{p}(V/M)).\mathrm{p}(M)}{1 - \mathrm{p}(V)} = \frac{0,75 \times 0,4}{0,4} = 0,75. \end{aligned}$$

Le vaccin est efficace.

4. Deux urnes U_1 et U_2 contiennent chacune 5 boules bleues et 3 boules rouges.

a) On tire une boule de chaque urne. Quelle est la probabilité de tirer deux boules bleues ?

b) On tire une boule de U_1, on la met dans U_2, puis on tire une boule de U_2. Quelle est la probabilité d'avoir tiré deux boules bleues ? Et celle de tirer une boule bleue de l'urne U_2 ?

Solution : a) Soient B_i (resp. R_i) l'événement "j'ai tiré une boule bleue (resp. rouge) de l'urne U_i". Les événements B_1 et B_2 sont indépendants, donc

$$\mathrm{p}(B_1 \cap B_2) = \mathrm{p}(B_1) \,.\, \mathrm{p}(B_2) = \left(\frac{5}{8}\right)^2 \simeq 0,39.$$

b)

$$\mathrm{p}(B_1 \cap B_2) = \mathrm{p}(B_2/B_1) \,.\, \mathrm{p}(B_1) = \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{12} \simeq 0,42$$

$\mathrm{p}(B_2)$ nous est donné par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(B_2) &= \mathrm{p}(B_2 \cap B_1) + \mathrm{p}(B_2 \cap R_1) \\ &= \mathrm{p}(B_2 \cap B_1) + \mathrm{p}(B_2/R_1)\,\mathrm{p}(R_1) \\ &= \tfrac{5}{12} + \tfrac{5}{9} . \tfrac{3}{8} = \tfrac{5}{8} = 0,625. \end{aligned}$$

3.2 Formule des probabilités composées

Théorème 6 *Pour tous événements* $A_1, ..., A_m$,

$$\mathrm{p}(A_1 \cap ... \cap A_m) = \mathrm{p}(A_1/A_2 \cap ... \cap A_m)\,\mathrm{p}(A_2/A_3 \cap ... \cap A_m) ... \mathrm{p}(A_{m-1}/A_m) \,.\, \mathrm{p}(A_m)\,.$$

Preuve : Récurrence sur m. C'est vrai au rang $m = 2$. Au rang $m \geq 2$, on écrit

$$\mathrm{p}(A_1 \cap ... \cap A_m) = \mathrm{p}(A_1/A_2 \cap ... \cap A_m)\,\mathrm{p}(A_2 \cap ... \cap A_m)$$

et l'on applique l'hypothèse récurrente à $\mathrm{p}(A_2 \cap ... \cap A_m)$. ■

Exercice : **5.** Quelle est la probabilité pour qu'il y ait au moins deux personnes nées le même jour dans une assemblée de n personnes ?

Solution : Soit p_n la probabilité cherchée. Cherchons la probabilité de l'événement contraire A : "Dans cette assemblée, il n'y a pas deux personnes nées le même jour". On aura

$$p_n = \mathrm{p}\left(\complement A\right) = 1 - \mathrm{p}(A)\,.$$

Première méthode : En notant A_i l'événement "parmi les i premières personnes il n'y en a pas deux nées le même jour", on a

$$\mathrm{p}(A_i/A_1 \cap ... \cap A_{i-1}) = \frac{365 - (i-1)}{365}$$

et la formule des probabilités composées donne

$$\mathrm{p}(A) = \mathrm{p}(A_1 \cap ... \cap A_n) = \frac{365 - (n-1)}{365} . \frac{365 - (n-2)}{365} ... \frac{364}{365} . \frac{365}{365}.$$

Seconde méthode : L'univers Ω des possibles est formé des n-listes d'entiers choisis dans $\mathbb{N}_{365} = \{1, 2, ..., 365\}$. Il y en a 365^n. A est formé des n-listes dont tous les termes sont distincts deux à deux : soit $\#A = \frac{365!}{(365-n)!}$, et

$$\mathrm{p}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{365!}{365^n\,(365-n)!}.$$

Voici le calcul de quelques valeurs de p_n (données en %) :

n	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
p_n	11,7	25,3	41,1	56,9	70,6	81,4	89,1	94	97	98,6	99,4

3.3 Théorème de Bayes

Théorème 7 *Si* $\{C_1, ..., C_n\}$ *est une partition de* Ω *et si* $A \subset \Omega$,

$$\mathrm{p}\left(C_i/A\right) = \frac{\mathrm{p}\left(A/C_i\right).\mathrm{p}\left(C_i\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{p}\left(A/C_k\right).\mathrm{p}\left(C_k\right)}.$$

Preuve :

$$\mathrm{p}\left(C_i/A\right) = \frac{\mathrm{p}\left(C_i \cap A\right)}{\mathrm{p}\left(A\right)} = \frac{\mathrm{p}\left(A/C_i\right).\mathrm{p}\left(C_i\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{p}\left(A \cap C_k\right)} = \frac{\mathrm{p}\left(A/C_i\right).\mathrm{p}\left(C_i\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{p}\left(A/C_k\right).\mathrm{p}\left(C_k\right)}. \blacksquare$$

Exercices : 6. Trois urnes indiscernables contiennent des boules blanches et des boules noires :
- la première contient 14 boules noires et 5 boules blanches,
- la seconde contient 3 boules noires et 45 boules blanches,
- la troisième contient 3 boules noires et 4 boules blanches,
On tire une boule blanche. Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de la troisième urne ?

Solution : Soit B l'événement "la boule tirée est blanche" et U_i l'événement "la boule tirée provient de la i-ème urne". Les urnes étant indiscernables, on a $\mathrm{p}\left(U_i\right) = \frac{1}{3}$, et la formule de Bayes donne

$$\begin{aligned} \mathrm{p}\left(U_3/B\right) &= \frac{\mathrm{p}\left(B/U_3\right).\mathrm{p}\left(U_3\right)}{\mathrm{p}\left(B/U_1\right).\mathrm{p}\left(U_1\right) + \mathrm{p}\left(B/U_2\right).\mathrm{p}\left(U_2\right) + \mathrm{p}\left(B/U_1\right).\mathrm{p}\left(U_1\right)} \\ &= \frac{\frac{4}{7}\frac{1}{3}}{\frac{5}{19}\frac{1}{3} + \frac{45}{48}\frac{1}{3} + \frac{4}{7}\frac{1}{3}} = \frac{3648}{11313} \simeq 0,32. \end{aligned}$$

7. Dans une population, un habitant sur cent est atteint d'une maladie. On a mis au point un test qui permet de détecter cette maladie, avec 8 chances sur 10 de reconnaître un malade (test positif) et 9 chances sur 10 de reconnaître un sujet sain (test négatif). Quelle est la probabilité qu'un sujet ayant donné un test positif soit réellement malade ?

Solution : Notons T l'événement "le test signale un malade" et M l'événement "le sujet est malade". On a

$$\mathrm{p}\left(M\right) = \frac{1}{100}; \quad \mathrm{p}\left(T/M\right) = \frac{8}{10}; \quad \mathrm{p}\left(T/\overline{M}\right) = \frac{1}{10},$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{p}\left(M/T\right) &= \frac{\mathrm{p}\left(T/M\right).\mathrm{p}\left(M\right)}{\mathrm{p}\left(T/M\right).\mathrm{p}\left(M\right) + \mathrm{p}\left(T/\overline{M}\right).\mathrm{p}\left(\overline{M}\right)} \\ &= \frac{\frac{8}{10}\frac{1}{100}}{\frac{8}{10}\frac{1}{100} + \frac{1}{10}\left(1 - \frac{1}{100}\right)} = \frac{8}{107} \simeq 0,075. \end{aligned}$$

Le test ne vaut rien !

8. La probabilité d'être un tricheur est évaluée à priori à t. La probabilité pour qu'un tricheur obtienne l'as en lançant un dé est a. Alain lance un dé et obtient l'as. Quelle est la probabilité pour qu'Alain soit un tricheur ? Que dire si $t = \frac{1}{2}$ et $a = 1$?

Solution : Notons T l'événement "c'est un tricheur" et A l'événement "le joueur obtient l'as". On a

$$\mathrm{p}(T/A) = \frac{\mathrm{p}(A/T) \,.\, \mathrm{p}(T)}{\mathrm{p}(A/T) \,.\, \mathrm{p}(T) + \mathrm{p}\left(A/\overline{T}\right) . \,\mathrm{p}\left(\overline{T}\right)} = \frac{at}{at + \frac{1}{6}(1-t)}.$$

Si $t = \frac{1}{2}$ et $a = 1$, on trouve $\mathrm{p}(T/A) = \frac{6}{7}$, et Alain sera un tricheur à 6 contre 7. L'hypothèse est absurde car revient à soupçonner Alain à priori : il aurait dès le départ une chance sur deux d'être un tricheur ! Et l'hypothèse $a = 1$ est exagérée. Il serait plus réaliste de choisir $t = \frac{1}{10}$ et $a = \frac{7}{10}$, ce qui donnerait $\mathrm{p}(T/A) = \frac{7}{22} \simeq 0,32$.

9. Dans une usine, trois machines A, B, C fabriquent le même type de pièces. La machine A (resp. B, C) produit 30% (resp. 55%, 15%) de l'ensemble des pièces. On sait par ailleurs que 90% (resp. 80%, 95%) des pièces fabriquées par A (resp. B, C) sont de bonne qualité.

a) On choisit une pièce au hasard. Quelle est la probabilité pour que cette pièce soit de bonne qualité ?

b) On choisit une pièce au hasard et l'on constate qu'elle est de bonne qualité. Quelle est la probabilité pour que cette pièce ait été fabriquée par la machine A ? par B ? par C ?

Solution : a) Soit Q l'événement "la pièce est de bonne qualité" et A (resp. B, C) les événements "la pièce a été fabriquée par la machine A (resp. B, C)". On aura

$$\mathrm{p}(Q) = \mathrm{p}(Q/A)\,\mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(Q/B)\,\mathrm{p}(B) + \mathrm{p}(Q/C)\,\mathrm{p}(C)$$

soit

$$\mathrm{p}(Q) = \frac{90}{100}\frac{30}{100} + \frac{80}{100}\frac{55}{100} + \frac{95}{100}\frac{15}{100} = 0,8525.$$

b)

$$\mathrm{p}(A/Q) = \frac{\mathrm{p}(A \cap Q)}{\mathrm{p}(Q)} = \frac{\mathrm{p}(Q/A)\,\mathrm{p}(A)}{\mathrm{p}(Q)} = \frac{\frac{9}{10} \times \frac{3}{10}}{0,8525} \simeq 0,32 \text{ etc}$$

4 Variables aléatoires à valeurs réelles dont l'ensemble des valeurs est fini

4.1 Exemple d'introduction

Reprenons l'expérience **1.** Supposons que l'on gagne 3 francs à chaque résultat pile, et que l'on perde 2 francs à chaque résultat face. L'univers étant

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, FFP, FPF, PFF, FFF\},$$

on peut calculer le gain $X(\omega)$ pour chaque $\omega \in \Omega$. X est une application de Ω dans l'ensemble fini $\{-6, -1, 4, 9\}$. X est ce que l'on appelle une **variable aléatoire**. La **loi de probabilité de** X est donné par le tableau :

a	-6	-1	4	9
$\mathrm{p}(X = a)$	1/8	3/8	3/8	1/8

4.2 Définitition, loi de probabilité

Définition 5 *Etant donné un univers Ω, on appelle* ***variable aléatoire sur*** Ω *toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$.*

Dans cette définition, on sous-entend que Ω est muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Dans le cas général où Ω est un espace probabilisable (i.e. un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{M}$), une variable aléatoire réelle est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable sur Ω (i.e. telle que pour tout ouvert U de $\mathbb{R}$, $X^{-1}(U) \in \mathcal{M}$) (cf W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975).

Attention : une v.a.r. (variable aléatoire réelle) est une application, ce que ne dit pas le mot "variable". Dans toute la suite, on supposera que l'ensemble des valeurs $X(\Omega)$ est fini.

Théorème 8 *Soit X une v.a.r. sur un espace probabilisé (Ω, p). On définit une probabilité p' sur $X(\Omega)$ en posant $\mathrm{p}'(A) = \mathrm{p}\left(X^{-1}(A)\right)$.*

Preuve : Si A et B sont deux parties disjointes de $X(\Omega)$, $X^{-1}(A)$ et $X^{-1}(B)$ le seront à fortiori et

$$\begin{aligned} \mathrm{p}'(A \cup B) &= \mathrm{p}\left(X^{-1}(A \cup B)\right) = \mathrm{p}\left(X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)\right) \\ &= \mathrm{p}\left(X^{-1}(A)\right) + \mathrm{p}\left(X^{-1}(B)\right) = \mathrm{p}'(A) + \mathrm{p}'(B) \end{aligned}$$

De plus $\mathrm{p}'(X(\Omega)) = \mathrm{p}(\Omega) = 1$ car X est une application. ■

Définition 6 p' *est la* ***loi de probabilité*** *de la v.a.r. X (encore appelée "****répartition****" ou "****distribution de probabilité****" de X). Si $x \in \mathbb{R}$, on note :*

$$(X = x) = X^{-1}(\{x\})\,;\ (X < x) = X^{-1}(]-\infty, x[)\,;\ (X \leq x) = X^{-1}(]-\infty, x])\,...$$

4.3 Fonction de répartition

Définition 7 *La* ***fonction de répartition*** *d'une v.a.r. X définie sur l'espace probabilisé (Ω, p) est l'application*

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & \mathrm{p}(X \leq x) \end{array}$$

Théorème 9 *Notons $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_m\}$. F est une fonction en escalier croissante, nulle sur $]-\infty, x_1[$ et égale à 1 sur $[x_m, +\infty[$. De plus*

$$\begin{cases} \mathrm{p}(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}) & \text{si } i \geq 2 \\ \mathrm{p}(X = x_1) = F(x_1) \end{cases}$$

Connaître la fonction de répartition de X revient donc à connaître la loi de probabilité de X.

Preuve : Il suffit de voir que

$$\begin{array}{ll} F(x) = \sum_{k=1}^{i} \mathrm{p}(X = x_k) & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}[, \\ F(x) = 0 & \text{si } x < x_1, \\ F(x) = 1 & \text{si } x \geq x_m. \end{array} ■$$

Exemple : Dessiner la fonction de répartition de la v.a.r. de l'exemple **1** d'introduction.

4.4 Espérance, variance, écart-type

Définition 8 *Soit X une v.a.r. définie sur l'espace probabilisé (Ω, p) et dont l'ensemble des valeurs est fini. Notons $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$ et $p_i = \mathrm{p}(X = x_i)$. L'**espérance mathématique** de X est le réel $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$ que l'on note aussi $E(X) = \overline{X}$. On appelle **v.a.r. centrée** la v.a.r. $X - \overline{X}$. La **variance** $V(X)$ de X est l'espérance du carré de la variable aléatoire centrée, soit*

$$V(X) = E\left(\left(X - \overline{X}\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - \overline{X}\right)^2.$$

L'écart-type *$\sigma(X)$ de X est la racine carrée de la variance :*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Théorème 10 ***Formule de Köenig***

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2.$$

Preuve :

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - \overline{X}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} p_i \overline{X}^2 - \sum_{i=1}^{n} 2 p_i x_i \overline{X} \\ &= E\left(X^2\right) + E(X)^2 - 2E(X)^2 = E\left(X^2\right) - E(X)^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Remarques : 1) L'espérance apparaît comme la valeur moyenne prise par la v.a.r. X. En termes de jeu, si X désigne un gain, $E(X)$ est le gain moyen que l'on peut espérer. Si $E(X) = 0$, le jeu est équilibré. Si $E(X) < 0$, on peut espérer perdre plus que ce que l'on aura gagné.

2) Deux variables aléatoires peuvent avoir la même espérance tout en présentant des caractéristiques de dispersion très différentes. Ce sont V et σ qui mesurent cette dispersion autour de la moyenne. Reprenons l'exemple **1** :

$$E(X) = \frac{1}{8} \times (-6) + \frac{3}{8} \times (-1) + \frac{3}{8} \times 4 + \frac{1}{8} \times 9 = \frac{3}{2}.$$

Ici, le gain moyen est de 1,5 francs. On a

$$E\left(X^2\right) = \frac{1}{8} \times 6^2 + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{3}{8} \times 4^2 + \frac{1}{8} \times 9^2 = 21$$

donc

$$V(X) = 21 - \frac{9}{4} = \frac{75}{4} = 18,75 \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \simeq 4,3.$$

Définissons un v.a.r. Y de même espérance $\frac{3}{2}$ mais moins dispersée, par exemple en se donnant sa loi de probabilité :

y	1	3/2	2
$\mathrm{p}(Y = y)$	1/8	3/4	1/8

On trouve $E(Y) = \frac{3}{2}$, $E\left(Y^2\right) = \frac{37}{16}$, $V(Y) = \frac{1}{16}$ et $\sigma(Y) = \frac{1}{4}$.

Théorème 11 ***Linéarité de l'espérance***
L'espérance mathématique est une application linéaire de l'espace vectoriel des v.a.r. sur Ω *dans* $\mathbb{R}$*, autrement dit*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall X, Y \ v.a.r. \quad E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

Preuve :

$$E(\lambda X) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{p}(\lambda X = \lambda x_i)\, \lambda x_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} \mathrm{p}(X = x_i)\, x_i = \lambda E(X).$$

Si $\{z_1, ..., z_n\}$ est l'ensemble des valeurs prises par la fonction $X + Y$,

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{p}(X+Y = z_k)\ z_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{i,j \\ x_i+y_j=z_k}} \mathrm{p}(X = x_i,\, Y = y_j)\, z_k \\ &= \sum_{i,j} \sum_{\substack{k=1 \\ x_i+y_j=z_k}}^{n} \mathrm{p}(X = x_i,\, Y = y_j)\, z_k. \end{aligned}$$

Pour i, j fixés, le seul terme de la somme $\sum_{\substack{k=1 \\ x_i+y_j=z_k}}^{n}$ est obtenu pour l'unique indice k tel que $z_k = x_i + y_j$. Par suite

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum_{i,j} \mathrm{p}(X = x_i,\, Y = y_j)\,(x_i + y_j) \\ &= \sum_{i} \left[\sum_{j} \mathrm{p}(X = x_i,\, Y = y_j)\right] x_i + \sum_{j} \left[\sum_{i} \mathrm{p}(X = x_i,\, Y = y_j)\right] y_j. \end{aligned}$$

Les événements $(X = x_i,\, Y = y_j)$ indexés j forment une partition de $(X = x_i)$, donc

$$\sum_{j} \mathrm{p}(X = x_i,\, Y = y_j) = \mathrm{p}(X = x_i).$$

De même

$$\sum_{i} \mathrm{p}(X = x_i,\, Y = y_j) = \mathrm{p}(Y = y_j)$$

et l'on obtient bien

$$E(X+Y) = \sum_{i} \mathrm{p}(X = x_i)\, x_i + \sum_{j} \mathrm{p}(Y = y_j)\, y_j = E(X) + E(Y). \blacksquare$$

Remarque : La démonstration de la linéarité de E est triviale si Ω est supposé fini. En effet, si l'on note $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_m\}$, la famille $\left\{X^{-1}(\{x_i\})\right\}_{i \in \{1,...,n\}}$ est une partition de Ω et

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\omega \in X^{-1}(\{x_i\})} \mathrm{p}(\omega)\, X(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathrm{p}(\omega)\, X(\omega),$$

donc immédiatement

$$\begin{aligned} E(\lambda X+\mu Y) &= \sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{p}(\omega)(\lambda X+\mu Y)(\omega) \\ &= \lambda\sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{p}(\omega) X(\omega)+\mu\sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{p}(\omega) Y(\omega)=\lambda E(X)+\mu E(Y). \end{aligned}$$

Exemple : 9. On lance deux dés. Quelle est la moyenne des sommes des points obtenue ?

Solution : X_i désignant la v.a.r. donnant les points obtenus sur le dé numéro i, on s'intéresse à $X = X_1 + X_2$. On a

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1)+E(X_2)=2E(X_1) \\ &= 2.\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=7. \end{aligned}$$

Théorème 12 *Pour tout réel λ et pour toute v.a.r. X, on a $V(\lambda X) = \lambda^2 V(X)$.*

Définition 9 *Deux v.a.r. sont dites **indépendantes** si les événements $X = x$ et $Y = y$ sont indépendants pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Cela revient à écrire*

$$\forall x,y\in\mathbb{R} \quad \mathrm{p}(X=x \text{ et } Y=y)=\mathrm{p}(X=x)\,\mathrm{p}(Y=y).$$

Théorème 13 *Soient X et Y deux v.a.r. dont l'ensemble des valeurs est fini.*
1) Si X et Y sont indépendantes, $E(XY) = E(X).E(Y)$.
2) $V(X+Y) = V(X) + V(Y) \Leftrightarrow E(XY) = E(X).E(Y)$.

Preuve : Notons $\{z_1, ..., z_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par la fonction XY.

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_k \mathrm{p}(XY=z_k)\,z_k=\sum_k \sum_{\substack{i,j \\ x_iy_j=z_k}} \mathrm{p}(X=x_i \text{ et } Y=y_j)\,z_k \\ &= \sum_{i,j} \sum_{\substack{k \\ x_iy_j=z_k}} \mathrm{p}(X=x_i \text{ et } Y=y_j)\,z_k. \end{aligned}$$

Pour i, j fixés, la somme $\sum\limits_k$ ci-dessus ne possède qu'un seul terme, donc

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{i,j} \mathrm{p}(X=x_i \text{ et } Y=y_j)\,x_iy_j \\ &= \sum_{i,j} \mathrm{p}(X=x_i)\,\mathrm{p}(Y=y_j)\,x_iy_j=E(X)\,E(Y). \end{aligned}$$

et 1) est démontré. L'affirmation 2) provient ensuite de l'équivalences entre les lignes suivantes :

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$
$$E\left((X+Y)^2\right)-\left(\overline{X}+\overline{Y}\right)^2=E\left(X^2\right)-\overline{X}^2+E\left(Y^2\right)-\overline{Y}^2$$
$$E(XY)=\overline{X}.\overline{Y}.\ \blacksquare$$

5 Exemples de lois de probabilité

5.1 Loi uniforme

$X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$ et $\text{p}(X = x_i) = \frac{1}{n}$ pour tout i. On trouve $E(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_i$ (c'est la moyenne usuelle) et $V(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} x_i\right)^2$.

5.2 Loi de Bernouilli

Une **épreuve de Bernouilli** est une expérience aléatoire ayant seulement deux issues : la réussite (avec une probabilité p) ou l'échec (avec une probabilité q). L'univers des issues est donc $\Omega = \{r, e\}$ et l'on a $p + q = 0$. Soit X la variable aléatoire valant 1 en cas de réussite et 0 en cas d'échec. La loi de probabilité de X, appelée **loi de Bernouilli**, est donnée par $\text{p}(X = 1) = p$ et $\text{p}(X = 0) = q$, et l'on trouve

$$\begin{cases} E(X) = p, \\ V(X) = p - p^2 = pq. \end{cases}$$

5.3 Schéma de Bernouilli et loi binômiale

Un **schéma de Bernouilli** est la succession de n épreuves de Bernouilli identiques et indépendantes. Si $\Omega = \{r, e\}$ désigne l'univers de l'épreuve de Bernouilli, si p désigne la probabilité de succès de l'épreuve et q la probabilité d'échec (ie $\text{p}(r) = p$ et $\text{p}(e) = q$), l'univers du schéma de Bernouilli sera le produit cartésien $\Omega^n = \Omega \times ... \times \Omega$. Un événement élémentaire de Ω^n est une n-liste $(a_1, ..., a_n)$ avec $a_i \in \Omega$.

Comme les épreuves successives sont indépendantes, la probabilité de l'événement élémentaire $a = (a_1, ..., a_n)$ où k coordonnées a_i valent r (ie "correspondant à k réussites dans un ordre fixé à l'avance") sera

$$\begin{aligned} \text{p}(a) &= \text{p}(a_n / (a_1, ..., a_{n-1})) . \text{p}(a_{n-1} / (a_1, ..., a_{n-2})) ... \text{p}(a_1) \\ &= \text{p}(a_n) . \text{p}(a_{n-1}) ... \text{p}(a_1) = p^k . q^{n-k}. \end{aligned}$$

Soit R_k l'événement "il y a k réussites". R_k est la réunion de tous les événements élémentaires $a = (a_1, ..., a_n)$ où exactement k coordonnées a_i valent r. Il y a $\binom{n}{k}$ tels événements, donc $\text{p}(R_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

La **loi binômiale** est la loi de probabilité de la v.a.r. X comptabilisant le nombre de réussites sur ces n épreuves. Ainsi $X(\Omega^n) = \{0, 1, ..., n\}$, et l'événement $(X = k)$ n'est autre que l'événement R_k. On obtient

$$\text{p}(X = k) = \text{p}(R_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Si X_i désigne la v.a.r. de la i-ème épreuve de Bernouilli, $X = X_1 + ... + X_n$. On en déduit

$$E(X) = E(X_1) + ... + E(X_n) = np.$$

Les lois X_i étant indépendantes, on peut même écrire

$$V(X) = V(X_1) + ... + V(X_n).$$

Compte tenu de $V(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = p - p^2 = pq$, on trouve $V(X) = npq$ et donc $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

Remarque : Le calcul direct est possible et intéressant. En se rappelant que $p + q = 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kp(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np(p+q)^{n-1} = np. \end{aligned}$$

D'autre part $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ et $E(X^2) = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. On peut calculer

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} n(n-1) C_{n-2}^{k-2} p^k q^{n-k} \\ &= n(n-1) p^2 \sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} p^{k-2} q^{n-k} = n(n-1) p^2 (p+q)^{n-2} \\ &= n(n-1) p^2. \end{aligned}$$

Comme $A = E(X^2) - E(X)$, cela entraîne

$$V(X) = A + E(X) - E(X)^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = npq. \blacksquare$$

6 Complément : les probabilités à l'écrit du CAPES

Si vous avez préparé des leçons d'oral en probabilité, vous n'avez pas perdu votre temps : vous avez du même coup augmenté vos chances de bien réagir sur des questions de probabilités à l'écrit du concours. N'oublions pas que, depuis l'an 2000, les probabilités, les statistiques, l'arithmétique et l'algorithmique ont beaucoup plus de chance de tomber à l'écrit. Quelques exemples et "mises en bouche"...

6.1 CAPES interne 2003

Le premier problème de ce CAPES interne permet de s'entraîner sur les probabilités conditionnelles. L'expérience aléatoire étudiée met deux compétiteurs en lice pour un tir sur cible, chacun ayant un taux de réussite différent et risquant à chaque fois d'être éliminé. On répète les épreuves et l'on s'intéresse au nombre d'épreuves à la suite desquelles intervient la première élimination, puis à d'autres événements intéressants qui permettent aussi de travailler sur des matrices. C'est un must pour votre préparation en probabilités.

6.2 CAPES externe 2003

L'énoncé de la seconde composition du CAPES externe 2003 contenait une première partie alliant probabilités et arithmétique. Il supposait que tous les candidats connaissaient la définition de "mutuelle indépendance" de plusieurs événements, et ne la rappelait malheureusement pas. Donnons-là ici :

Définition 10 *Les événements A_1, A_2, ..., A_k sont dit* ***mutuellement indépendants*** *si pour tout sous-ensemble $\{i_1, ..., i_p\}$ de $[1..k]$,*

$$\mathrm{p}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_p}\right) = \mathrm{p}\left(A_{i_1}\right) \times \mathrm{p}\left(A_{i_2}\right) \times ... \times \mathrm{p}\left(A_{i_p}\right).$$

Si les seules conditions $\mathrm{p}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2}\right) = \mathrm{p}\left(A_{i_1}\right) \times \mathrm{p}\left(A_{i_2}\right)$ sont vérifiées pour toute paire $\{i_1, i_2\}$ de $[1..k]$, on dit que les événements A_1, A_2, ..., A_k sont ***indépendants deux à deux****.*

Le Théorème suivant correspond à la première question de l'épreuve :

Théorème 14 *Si les événements A_1, A_2, ..., A_k sont mutuellement indépendants, alors*
1) $\overline{A_1}$, A_2, ..., A_k sont mutuellement indépendants,
2) $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, ..., $\overline{A}_k$ sont mutuellement indépendants,

Preuve : 1) On montre la propriété

$$\mathcal{P}(i) : \quad \overline{A_1},\ A_2,\ ...,\ A_i \text{ sont mutuellement indépendants}$$

par récurrence finie sur i, pour i variant de 2 à k. $\mathcal{P}(2)$ d'après le Théorème 5. Si $\mathcal{P}(i-1)$ est vraie, la formule des probabilités totales donne

$$\mathrm{p}\left(A_2 \cap ... \cap A_i\right) = \mathrm{p}\left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap ... \cap A_i\right) + \mathrm{p}\left(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_i\right).$$

En appliquant l'hypothèse récurrente et en rappelant que A_1, A_2, ..., A_k sont indépendants, on obtient

$$\mathrm{p}\left(A_2\right) \times ... \times \mathrm{p}\left(A_i\right) = \mathrm{p}\left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap ... \cap A_i\right) + \mathrm{p}\left(A_1\right) \times ... \times \mathrm{p}\left(A_i\right)$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{p}\left(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_i\right) &= \left(1 - \mathrm{p}\left(A_1\right)\right) \times \mathrm{p}\left(A_2\right) \times ... \times \mathrm{p}\left(A_i\right) \\ &= \mathrm{p}\left(\overline{A_1}\right) \times \mathrm{p}\left(A_2\right) \times ... \times \mathrm{p}\left(A_i\right). \end{aligned}$$

Cela prouve la mutuelle indépendance des événements $\overline{A}_1$, A_2, ..., A_i et démontre $\mathcal{P}(i)$.

2) On montre la propriété

$$\mathcal{H}(i) : \quad \overline{A}_1,\ \overline{A}_2,\ ...,\ \overline{A}_i,\ A_{i+1},\ ...,\ A_k \text{ sont mutuellement indépendants}$$

par récurrence finie sur i, pour i variant de 1 à k. La propriété $\mathcal{H}(1)$ est vraie puisque

$$A_1,\ ...,\ A_k \text{ mutuellement indépendants} \Rightarrow \overline{A}_1,\ ...,\ A_k \text{ mutuellement indépendants}$$

d'après la première partie du Théorème. Si $\mathcal{H}(i-1)$ est vraie, les événements $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, ..., $\overline{A}_{i-1}$, A_i, ..., A_k sont mutuellement indépendants et la première partie du Théorème montre encore que les événements $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, ..., $\overline{A}_{i-1}$, $\overline{A}_i$, A_{i+1}, ..., A_k sont mutuellement indépendants, ce qui prouve $\mathcal{H}(i)$. ■

Le lecteur préparant le CAPES est fortement encouragé à s'entraîner en priorité sur la partie I de la seconde composition du CAPES externe 2003, et, s'il a du temps, sur l'énoncé in extenso, puisque l'un des objectifs du problème est de comprendre le test probabiliste de primalité de Miller-Rabin. La partie I est un exemple de l'application des probabilités en arithmétique, pour obtenir l'expression $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ de la fonction indicatrice d'Euler ainsi que la formule d'Euler $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.